

## 기체-액체-고체 유동층에서 압력변동 신호의 Fractal 해석

강 용 · 민병태\* · 고명한 · 김상돈\*\*

충남대학교 화학공학과

\*한국원자력연구소

\*\*한국과학기술원 화학공학과

(1993년 6월 16일 접수, 1993년 9월 27일 채택)

### Fractal Analysis of Pressure Fluctuations in a Gas-Liquid-Solid Fluidized Bed

Yong Kang, Byung Tae Min\*, Myung Han Ko and Sang Done Kim\*\*

*Department of Chemical Engineering, Chungnam National University*

*\*Korea Atomic Energy Research Institute*

*\*\*Department of Chemical Engineering, KAIST*

(Received 16 June 1993; accepted 27 September 1993)

#### 요 약

기체-액체-고체 유동층에서 각 상들의 접촉과 흐름 현상을 고려한 수력학적 특성을 해석하고자 압력 변동 신호를 fractal 해석하였다. 압력 변동 신호는 유동 입자의 크기가  $1.0-6.0 \times 10^{-3}(\text{m})$ 의 범위에서, 기체유속은  $0-10 \times 10^{-2}(\text{m/s})$ , 그리고 액체유속은  $4-16 \times 10^{-2}(\text{m/s})$ 의 범위에서 측정되었으며 유동층으로는 직경 0.152(m), 길이 2.5(m)인 아크릴관을 사용하였다. 각 실험조건에서 유동층이 정상상태에 도달한 후 압력 변동 신호를 측정하였으며 측정된 압력 변동 신호 시리즈를 fractional Brownian 거동에 근거하여 rescaled range 해석으로 Pox diagram을 얻었으며, 이 Pox diagram으로부터 Hurst 지수와 국부 fractal 차원을 구하였다. 압력 변동 신호의 fractal 해석 결과 Hurst 지수는 기체-액체-고체 유동층의 특성을 잘 나타내었는데, 이 값은 기체유속이 증가함에 따라 감소하였고, 액체유속이 증가함에 따라 최대값을 나타내었으며, 유동 입자의 크기가 증가함에 따라 증가하였다.

**Abstract**—To investigate the hydrodynamic characteristics of gas-liquid-solid fluidized beds considering the phase contact and flow phenomena of individual phase, fractal analysis has been adopted to manipulate the pressure fluctuation signal from the fluidized bed. The pressure fluctuation signals were measured in a gas-liquid-solid fluidized bed of 0.152 m $\times$ 2.5 m acryle column. The size of fluidized particles was in the range of  $0-6.0 \times 10^{-3}(\text{m})$ , and the gas and liquid flow rates were in the range of  $0-10.0 \times 10^{-2}(\text{m/s})$  and  $4.0-16.0 \times 10^{-2}(\text{m/s})$ , respectively. The pressure fluctuation signals which were measured at a steady state were analyzed in terms of Rescaled Range analysis(R/S analysis) based on the concept of fractional Brownian motion, yielding the Pox diagram where the Hurst exponent and eventually local fractal dimension could be obtained. From the fractal analysis of the signals, the hydrodynamic characteristics of gas-liquid-solid fluidized beds could be described by means of the Hurst exponent; the Hurst exponent decreased with an increase in the gas flow rate, but it increased with an increase in the fluidized particle size. However, it exhibited a maximum with an increase in the liquid flow rate.

## 1. 서 론

기체-액체-고체 유동층은 연속 조작이 용이하며 다상상을 효과적으로 접촉시킬 수 있어서 화학공정의 다상 반응이나 다상의 접촉 공정에 그 응용 범위는 날로 확대되어 가고 있다[1, 2].

기체-액체-고체 유동층은 이들 상(phase)들의 접촉이나 흐름 양상이 매우 복잡하여서 해석적으로 이들의 거동을 해석하기는 해결해야 할 문제들이 너무 많아서 deterministic 방법에 의한 기체-액체-고체 유동층의 수력학적 거동에 대한 해석은 국내외를 막론하고 거의 없는 실정이다.

그러나, 연속적으로 조작되는 기체-액체-고체 유동층을 제어(control)한다든지 또는 정상상태 조업 여부 및 균일 흐름의 여부 등 제 현상에 대한 효과적인 인지를 위해서는 이와 같은 다상의 유동층의 수력학적 거동에 대한 해석은 필요불가결하다 하겠다.

따라서, 본 연구에서는 기체-액체-고체 유동층 내부에서의 각 상들의 접촉이나 흐름현상들에 의해 나타나는 압력 변동 특성을 해석하므로써 이들 유동층의 수력학적 특성을 해석하고자 하였다.

각 실험조건에서 조작되는 기체-액체-고체 유동층으로부터 얻을 수 있는 압력 변동 신호는 stochastic 방법으로 처리하는 것이 보다 효율적이며, 많은 가정이 도입되어야만 하는 deterministic 방법보다 훨씬 실제 현상을 잘 설명할 수 있는 것으로 알려져 있다[3-8].

본 연구에서는 stochastic의 접근 방법으로 압력 변동 신호의 해석에 매우 효율적이라 판단되는 fractal 해석 방법을 적용하였다. Fractal 개념에 의한 rescaled range 해석(R/S analysis) 방법은 많은 양의 data를 효과적으로 처리할 수 있으며, data의 무작위적 거동(random motion)에 대한 해석을 용이하게 하여 주는 것으로 알려져 있다[9, 10].

이와 같은 연구는 지금까지의 기체-액체-고체 유동층에서 단편적이거나 국부적 또는 특정현상에 국한하여 정성적으로 해석하여 왔던 현상설명을 보다 포괄적이며 전체적으로 해석하는데 매우 중요한 자료를 제공할 수 있을 것으로 판단된다.

## 2. Fractal 해석

다상 유동층 내부에서의 압력 변동을 측정된 압력 변동 신호  $X(t)$ 의 시간에 따른 series 중에서 시간  $t=1$ 에서  $t=T$ 의 영역을 선택하여 다음과 같이 압력 변동 신호의 subset를 생각할 수 있는데[5-10],

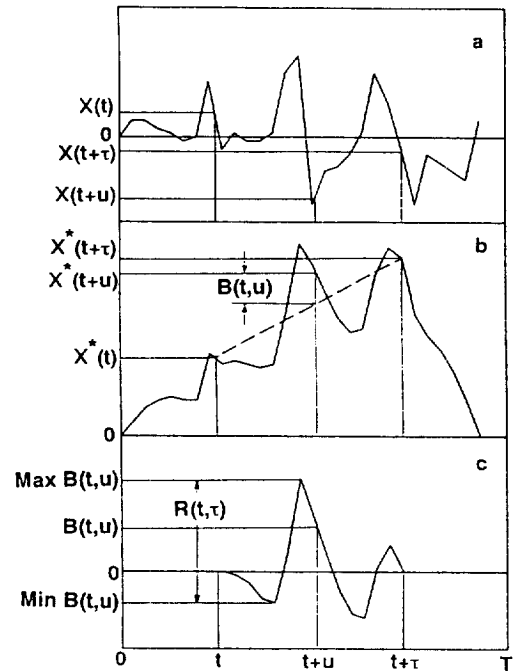


Fig. 1. Construction of the sample range,  $R(t, \tau)$ .

$$X^*(t) = \sum_{u=1}^t X(u) \quad (1)$$

이를 이용하면 압력 변동 신호의 series중에서 시간  $t+1$ 에서  $t+\tau$ 까지의 Subrecord에서 압력 변동 신호의 평균값을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{\tau} [X^*(t+\tau) - X^*(t)] \quad (2)$$

이 subrecord에서 압력 변동 신호의 평균값은 Fig. 1에서 점선의 기울기와 같아진다. 한편, Fig. 1에서  $B(t, u)$ 를 시간  $t+1$ 에서  $t+\tau$ 까지의 subrecord에서 압력 변동 신호  $X(t, u)$ 가 그 평균값으로부터 벗어나는 편차의 합으로 나타낸다면  $B(t, u)$ 는 다음 식과 같이 쓸 수 있다.

$$B(t, u) = [X^*(t+u) - X^*(t)] - (u/\tau)[X^*(t+\tau) - X^*(t)] \quad (3)$$

또한, Fig. 1에서 표본연속구간(sample sequential range),  $R(t, \tau)$ 를 다음과 같이 정의하면,

$$R(t, \tau) = \text{Max } B(t, u) - \text{Min } B(t, u) \quad (4) \\ 0 \leq u \leq \tau \quad 0 \leq u \leq \tau$$

압력 변동 신호의 시간에 따른 series중 시간  $t+1$ 에서

$t + \tau$ 까지의 subrecord의 표본연속분산(sample sequential variance),  $S^2(t, \tau)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S^2(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{u=t+1}^{t+\tau} X^2(u) - \left[ \frac{1}{\tau} \sum_{u=t+1}^{t+\tau} X(u) \right]^2 \quad (5)$$

여기서, 재조정된 구간(rescaled range),  $R(t, \tau)/S(t, \tau)$ 를 다음과 같이 시간  $\tau$ 의 Power 함수로 나타낼 수 있다.

$$\frac{R(t, \tau)}{S(t, \tau)} \propto \tau^H \quad (6)$$

만일, 시간의 변화에 따른 압력 변동 신호  $X(t)$ 가 무작위적 함수(random function)이고, 이들 신호들간에 자체 연고성(self-affinity)을 가지고 있다면 이 압력 변동 신호의 time series는 지금까지의 고전적 Brownian 운동 모델로 해석하는 것보다 fractional Brownian 운동으로 해석하는 것이 매우 효과적이라 할 수 있는데, 그 이유는 고전적 Brownian 운동 모델은 신호들간의 자체 연고성에 대한 해석은 불가능하나 fractional Brownian 운동은 해석하고자 하는 자료들의 무작위적 요소와 함께 변칙적 확산(anomalous diffusion)에 의한 자료 상호간의 연고성을 해석할 수 있기 때문이다[5-10]. 식 (6)에서  $H$ 는 Hurst 지수라고 하는데 이 값은 시간 lag에 대한  $R/S$ 의 값을 log-log plot한 Pox diagram의 기울기가 된다.

Fractional Brownian 운동을 하는 압력 변동의 시간에 따른 series를 재조정된 구간에 의해 해석하며 Pox diagram으로부터 Hurst 지수를 구하여 압력 변동 신호가 가지고 있는 특성을 해석하는 것을 압력 변동 신호의 fractal 해석이라 할 수 있으며, 그 결과 압력 변동 신호의 fractal 차원을 구할 수 있다. 따라서, 압력 변동 신호의 fractal 차원은 그 신호에 내재되어 있는 특성을 예측하는 척도가 될 수 있는데, 예를 들면 완전 Brownian 운동을 하는 신호인 경우에 fractal 차원은 1.5가 된다.

한편, 압력 변동 series가 나타내는 국부적 fractal 차원  $d_{FL}$ 과 Hurst 지수,  $H$ 와의 관계는 다음과 같으므로 이 식으로부터 압력 변동 신호의 fractal 차원을 구할 수 있다.

$$d_{FL} = 2 - H, \quad 0 < H < 1 \quad (7)$$

### 3. 실험

본 연구에서 사용한 실험장치는 Fig. 2에서 볼 수 있는 바와 같은 직경이 0.152 m이고 높이가 2.5 m인 아크릴관을 사용하였다[11, 12].

실험변수로는 기체( $0-10.0 \times 10^{-2}$  m/s) 및 액체( $4.0-$

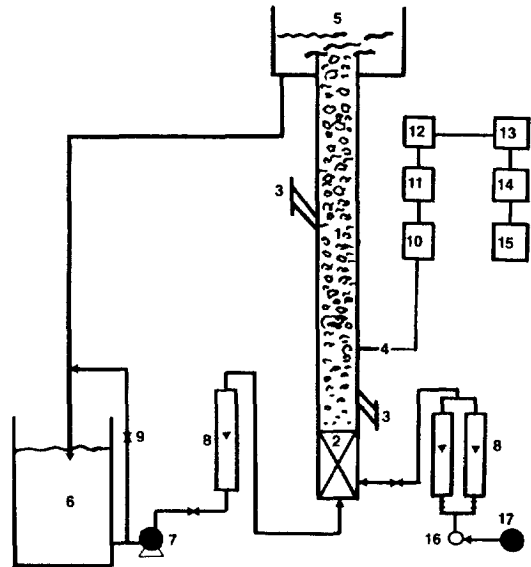


Fig. 2. Schematic diagram of experimental apparatus.

- |                 |                         |
|-----------------|-------------------------|
| 1. Column       | 10. Pressure transducer |
| 2. Distributor  | 11. Amplifier           |
| 3. Port         | 12. Oscilloscope        |
| 4. Pressure tap | 13. Filter              |
| 5. Weir         | 14. A/D converter       |
| 6. Reservoir    | 15. Computer            |
| 7. Pump         | 16. Regulator           |
| 8. Rotameter    | 17. Compressor          |
| 9. Valve        |                         |

$16.0 \times 10^{-2}$  m/s)의 유속 그리고 유동 입자의 크기( $0-6.0 \times 10^{-3}$  m) 등을 다루었으며, 기체로는 압축공기를, 액체로는 물을, 그리고 유동 입자로는 밀도가  $2500 \text{ kg/m}^3$ 인 유리구슬을 사용하였다.

압력 변동 신호는 각 실험조건에서 기체-액체-고체 유동층이 정상상태에 도달된 다음 측정하였는데, 압력 변동의 측정은 기체-액체-고체 유동층에서 가능한 끝부분의 영향(end effect)을 줄이면서 유동층 전체를 포함시키기 위해 적합하다고 판단되는 기체-액체 분산판으로부터 0.1 m 떨어진 위치에서 행하였다. 유동층 내부에서의 압력 변동은 반도체 형태의 압력 변환기(coupled electronics)를 사용하여 volt-time 신호로 바꾸었으며 이를 증폭기와 오실로스코프 및 필터를 거쳐서 A/D 변환기를 사용하여 디지털 신호로 바꾸어 PC에 입력시킨 다음 이를 off-line process로 통계적 처리를 하였다. 압력 변동 신호의 처리에 사용한 필터는 low-pass 필터를 사용하여서 선택하였다.

통계처리에 사용한 data는 재현성을 고찰하기 위하여

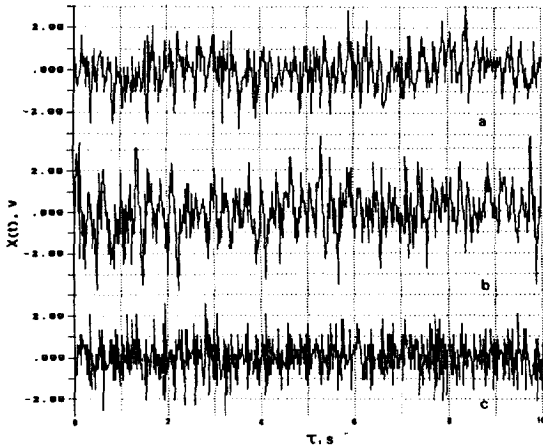


Fig. 3. Typical examples of pressure fluctuation signals in gas-liquid-solid fluidized beds.

	a	b	c
$d_p \times 10^3(\text{m})$	: 1.0	3.0	6.0
$U_G \times 10^2(\text{m/s})$	: 4.0	8.0	8.0
$U_L \times 10^2(\text{m/s})$	: 8.0	8.0	10.0

2-4회 측정하였으며 각 조건에서 data의 크기는 3000 개를 선정하였는데, 이는 각 조건에서의 유동층의 수력학적 특성을 해석하는데 충분하였다.

#### 4. 결과 및 고찰

기체-액체-고체 유동층의 정상상태(steady state)에서 얻는 압력 변동 신호의 예는 Fig. 3에서 볼 수 있듯이 기체-액체-고체 유동층에서 기체의 유속이 증가하면 압력 변동의 진폭과 진동수가 증가하는 것을 알 수 있다. 그러나, 유동 입자의 크기가 큰 경우( $d_p = 6.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ )에는 작은( $d_p = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ ) 경우에 비하여 압력 변동 신호의 진폭이 감소하는 것을 볼 수 있다. 이는 기체-액체-고체 유동층에서 압력 변동 신호에 가장 큰 영향을 미치는 요소중의 하나는 분산상인 기포의 형태로 존재하는 기체의 흐름이라는 것을 예측할 수 있으며, 유동 입자의 크기가 큰 경우는 작은 경우에 비하여 유동층 내부에서 기포들을 보다 효과적으로 분쇄시킬 수 있다는 예견을 할 수 있다.

이와 같은 압력 변동 신호들을 2절의 식들에 의해 rescaled range 해석(R/S 해석)하여 Fig. 4와 같은 Pox diagram을 얻을 수 있었으며, 이 Pox diagram의 기울기로부터 Hurst 지수인 H 값을 구할 수 있었다. 이렇게 하여 구한 Hurst 지수는 압력 변동 신호 data의 무작위적 요소(random component)를 나타내므로[5-8], 이 Hurst 지수값의 변화를 고찰하므로써 기체-액체-고체

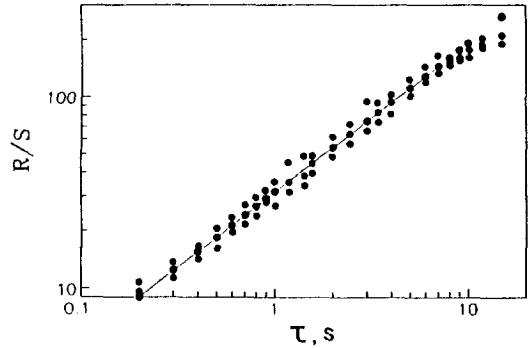


Fig. 4. Typical Pox diagram for pressure fluctuation signals in gas-liquid-solid fluidized beds.

$d_p \times 10^3(\text{m})$  : 6.0  
 $U_G \times 10^2(\text{m/s})$  : 10.0  
 $U_L \times 10^2(\text{m/s})$  : 10.0

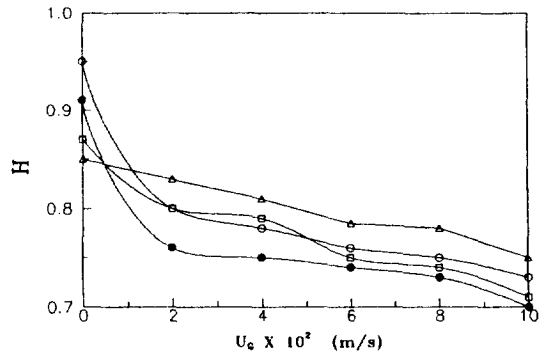


Fig. 5. Effects of  $U_G$  on H in gas-liquid-solid fluidized beds.

○ ● □ △  
 $d_p \times 10^3(\text{m})$  : 1.0 1.0 3.0 6.0  
 $U_L \times 10^2(\text{m/s})$  : 6.0 10.0 10.0 10.0

유동층의 무작위적 저동을 정량적으로 해석할 수 있다. Fig. 5에 각 실험조건에서 Hurst 지수의 값을 기체유속의 증가에 따라 나타내었는데, Hurst 지수의 변화 양상이 유동 입자의 크기에 따라 다르게 나타남을 알 수 있다.

즉, 기체유속이 0인 액체-고체 유동층에서는 유동 입자의 크기가 작은  $1 \times 10^{-3} \text{ m}$ 인 경우가 Hurst 지수값이 가장 컸으며, 입자의 크기가  $3 \times 10^{-3} \text{ m}$  그리고  $6 \times 10^{-3} \text{ m}$ 로 점점 증가함에 따라 Hurst 지수값은 감소하는 것을 알 수 있다.

이와 같은 현상은 기체가 주입되지 않은 액체-고체 유동층에서는 유동 입자의 크기가 작을수록 압력 변동

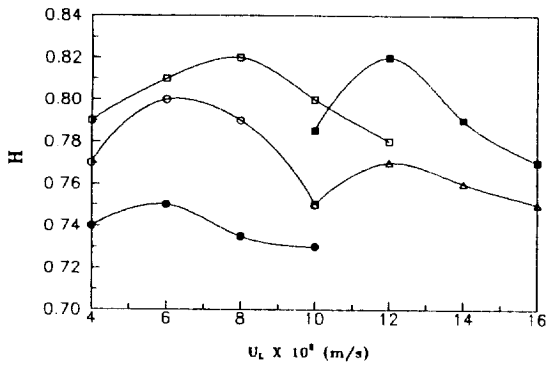


Fig. 6. Effects of  $U_L$  on  $H$  in gas-liquid-solid fluidized beds.

	○	●	□	■	△
$d_p \times 10^3$ (m)	: 1.0	1.0	3.0	6.0	6.0
$U_G \times 10^2$ (m/s)	: 4.0	8.0	4.0	6.0	10.0

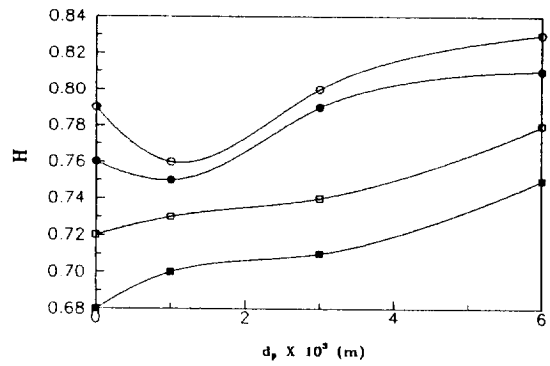


Fig. 7. Effects of  $d_p$  on  $H$  in gas-liquid-solid fluidized beds ( $U_L = 10.0 \times 10^{-2}$  m/s).

	○	●	□	■
$U_G \times 10^2$ (m/s)	: 2.0	4.0	8.0	10.0

신호의 시간에 따른 data(time series)의 특성에 무작위적 요소가 감소한다는 것을 의미하며, 따라서 액체-고체 유동층에서 분산상인 유동 고체 입자의 무작위적 거동(random motion)은 유동 입자의 크기가 증가할수록 증가한다고 설명할 수 있는데 이는 유동 입자의 크기가 작은 경우에는 유동 입자의 거동이 액체의 흐름에 큰 영향을 미치지 못하며 입자 개별적 거동이 매우 미약한 반면 유동입자의 크기가 큰 경우에는 유동 입자의 개별적 거동이 두드러지면서 액체의 흐름에도 영향을 미치기 때문으로 해석할 수 있다. 이와 같은 결과는 액체-고체 유동층의 압력 변동 신호를 해석한 Fan 등[5-8]의 연구 결과에서도 찾아볼 수 있다.

그러나, 액체-고체 유동층에 기체가 주입되기 시작하면 유동층 내부에 분산상으로 존재하는 기포의 무작위적 거동 때문에 Hurst 지수는 큰 폭으로 감소하며, 기체의 유속이 증가할수록 Hurst 지수는 점차적으로 감소하여 간다. 이와 같은 현상은 기체 유속이 증가함에 따라 기체-액체-고체 유동층 내부에 기포의 형태로 존재하는 기체의 체류량이 증가하며, 이에 따라 유동층 내부의 무작위적 거동이 점차적으로 증가한다고 할 수 있다.

또한, 기체-액체-고체 유동층에서는 유동 입자의 크기가 큰 경우가 작은 경우에 비하여 기포를 보다 효율적으로 분쇄할 수 있어서 유동층내에 존재하는 기포의 크기가 상대적으로 커서 파쇄되는 유동층 내부의 불균일 상태를 감소시킬 수 있기 때문에 Hurst 지수의 값이 입자의 크기가 작은 경우에 비하여 큰 값을 나타내고 있음을 알 수 있다.

기체-액체-고체 유동층에서 액체의 유속이 Hurst 지수에 미치는 영향을 Fig. 6에 나타내었는데 대부분의 경

우 Hurst 지수는 액체 유속의 증가에 따라 최대값을 나타내고 있다. Fig. 6에서 액체의 유속 범위는 유동 입자의 최소유동화속도에 따라 입자들이 충분히 유동하는 범위로 잡았다. 액체-고체 유동층에서 연구한 Fan 등[7, 8]의 연구 결과에 의하면 Hurst 지수는 액체 유속의 증가에 따라 유동 고체 입자들의 흐름 현상의 변화가 일어나며, 이는 유동층 내부에서 고체 입자들의 무작위적 거동과 밀접한 관계가 있음을 보여준다고 하였다.

기체-액체-고체 유동층에서도 액체유속의 증가에 따라 유동 입자의 흐름형태가 변환하기 때문에[11] Hurst 지수는 최대값을 나타낸다고 할 수 있으며, 이 Hurst 지수가 최대값을 나타내는 유동조건에서 유동층 내부에서의 기포와 유동 입자 그리고 연속상인 액체의 접촉과 흐름현상이 상대적으로 가장 규칙적이라 할 수 있다.

기체-액체-고체 유동층에서 유동 입자의 크기가 Hurst 지수에 미치는 영향을 Fig. 7에 나타내었다. Fig. 7에서 볼 수 있듯이 유동 입자의 크기가 상대적으로 작은  $1 \times 10^{-3}$ (cm)인 경우에 기체의 유속이  $2.4 \times 10^{-2}$ (m/s) 정도로 낮은 경우에는 일반적으로 Hurst 지수의 값이 기체-액체만 있는 기포탑보다 작은 값을 나타내었다. 그러나, 유동 입자의 크기가  $3 \times 10^{-3}$  m 및  $6 \times 10^{-3}$  m인 경우에는 기체-액체-고체 유동층에서의 Hurst 지수가 같은 기체와 액체유속의 기포탑에서의 Hurst 지수값보다 큰 값을 나타내었으며, 유동 입자의 크기가 작은  $1.0 \times 10^{-3}$ (m)인 경우에도 기체의 유속이 큰 경우( $8.10 \times 10^{-2}$  m/s)에는 기체-액체-고체 유동층에서의 Hurst 지수의 값이 같은 실험조건의 기체-액체의 기포탑에서 보다 큰 값을 나타내고 있음을 알 수 있다.

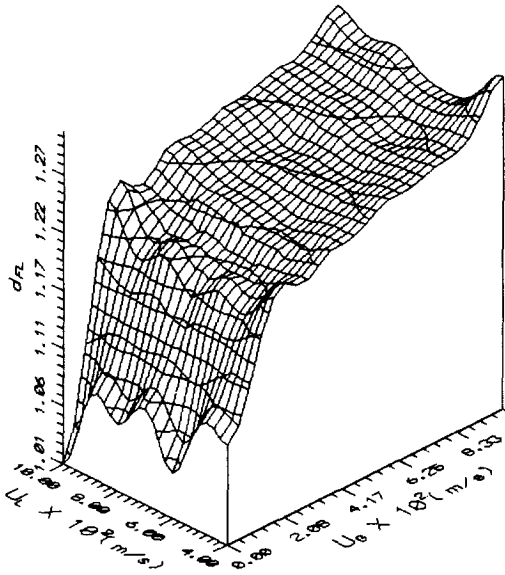


Fig. 8. Effects of  $U_G$  and  $U_L$  on  $d_{FL}$  in gas-liquid-solid fluidized beds ( $d_p = 1.0 \times 10^{-3}$  m).

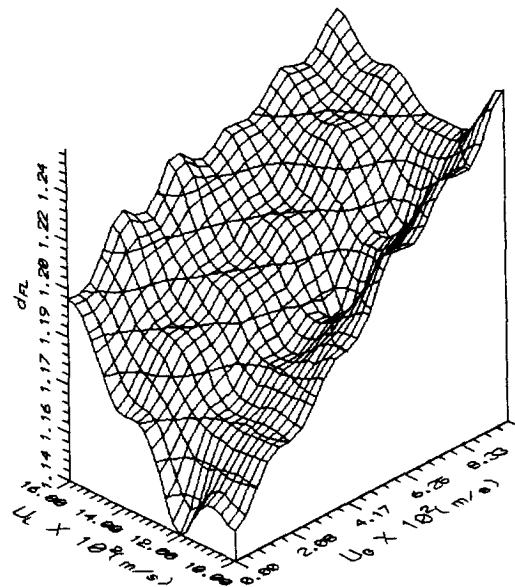


Fig. 9. Effects of  $U_G$  and  $U_L$  on  $d_{FL}$  in gas-liquid-solid fluidized beds ( $d_p = 6.0 \times 10^{-3}$  m).

이와 같은 결과는, 기체-액체-고체 유동층에서 유동 입자의 크기가 상대적으로 작은 경우 기체의 유속이 낮은 범위에서 일어날 수 있는 기포의 합체현상 때문으로 해석할 수 있다. 즉, 기포의 합체가 일어나면 기포의 크기분포가 불균일해지고 크기가 큰 기포의 상승 거동은 크기가 작은 기포들에 비하여 유동층 내부의 각 상들의 접촉과 흐름을 좀더 무작위적(random)으로 일어나게 하는 역할을 한다고 할 수 있다.

기체-액체-고체 유동층의 각 실험조건에서 구한 Hurst 지수값들로부터 구한 국부 fractal 차원(local fractal dimension)을 Fig. 8과 9에 각각 기체와 액체 유속을 변수로 하여 3차원적으로 나타내었는데, Fig. 8은 유동층 내부에서 기포의 합체현상이 일어나는 상대적으로 유동 입자의 크기가 작은 경우( $d_p = 1.0 \times 10^{-3}$  m)이고, Fig. 9는 유동층 내부에서 기포의 분체가 일어나는 조건으로 유동 입자의 크기가 상대적으로 큰 경우( $d_p = 6.0 \times 10^{-3}$  m)를 나타낸 것이다.

이와 같이 기체-액체-고체 유동층에서의 갖가지 실험 조작 조건에서 얻은 압력 변동 신호를 rescaled range 해석(R/S 해석)하여 얻은 Hurst 지수의 값들이 모두 0.5-1.0의 값들을 나타내고 있으므로, 기체-액체-고체 유동층 내부에서 각 상들의 접촉 및 흐름 현상은 fractional Brownian 거동을 나타내고 있다고 할 수 있다[8-10].

## 5. 결 론

이와 같은 본 연구의 결과, 다음의 몇 가지 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 기체-액체-고체 유동층의 수력학적 특성을 압력 변동 신호의 fractal 해석방법에 의해 고찰하므로써 그 특성들을 거시적, 정량적으로 분석할 수 있었다.

(2) 기체-액체-고체 유동층의 압력 변동 신호를 rescaled range 해석하여 얻은 Pox diagram으로부터 Hurst 지수의 값을 구할 수 있었으며, 이 다상유동층에서 각 상들의 접촉 및 흐름 현상은 fractional Brownian 거동을 한다고 할 수 있었다.

(3) 기체-액체-고체 유동층에서 압력 변동 신호의 해석결과 얻은 Hurst 지수는 기체유속이 증가함에 따라 감소하고, 유동 고체 입자의 크기가 증가함에 따라 일반적으로 증가하였으나, 액체유속이 증가함에 따라서는 최대값을 나타내었다.

## 감 사

본 연구는 한국과학재단 연구지원(911-1004-006-2)으로 이루어졌으며 귀 재단에 감사드립니다.

## 사용기호

$d_{FL}$  : local fractal dimension  
 $d_p$  : particle size [m]

H : Hurst exponent  
 $R(t, \tau)$ : sample sequential range for lag  $\tau$   
 $S^2(t, \tau)$ : variance  
 $t$  : time [sec]  
 $T$  : total available sample size  
 $u$  : time lag [sec]  
 $U_G$  : gas flow rate [m/s]  
 $U_L$  : liquid flow rate [m/s]  
 $X(t)$  : time series [v]  
 $X^*(t)$  : subset of time series [v]

#### 그리스 문자

$\tau$  : time lag [sec]

#### 하첨자

G : gas  
 L : liquid

#### 참고문헌

1. Fan, L. S.: Gas-Liquid-Solid Fluidization Engineering, Butterworths Publish, Stoneham, M4(1989).
2. Epstein, N.: Handbook of Fluids in Motion, Chermisimiff, N. P. and Gupta, R. ed., Ann Arbor Science(1983).
3. Yutani, N. and Fan, L. T.: *Powder Technol.*, **42**, 145 (1985).
4. Yutani, N., Ototake, N., Too, J. R. and Fan, L. T.: *Chem. Eng. Sci.*, **37**, 1079(1982).
5. Fan, L. T., Kang, Y., Yashima, M. and Nieogi, D.: Presented at the 21st Annual Meeting of the Fine Particle Society, San Diego, CA, August 21-25 (1990).
6. Fan, L. T., Nieogi, D., Yashima, M. and Nassar, R.: *AIChE J.*, **36**, 1529(1990).
7. Fan, L. T., Kang, Y., Nieogi, D. and Yashima, M.: Presented at the AIChE Annual Meeting, Chicago, IL, November 11-16(1991).
8. Fan, L. T., Kang, Y., Nieogi, D. and Yashima, M.: *AIChE J.*, **39**, 513(1993).
9. Mandelbrot, B. B. and Wallis, J. R.: *Water Res. Res.*, **5**, 321(1969).
10. Mandelbrot, B. B. and van Ness, J. W.: *SIAM Rev.*, **10**, 422(1968).
11. Kang, Y. and Kim, S. D.: *Particulate Sci. Technol.*, **6**, 133(1988).
12. Kang, Y., Nah, J. B., Min, B. T. and Kim, S. D.: *Chem. Eng. Commun.*, **97**, 197(1990).